

# Calcul booléen et circuits combinatoires

Année universitaire 2023–2024

## 1 Introduction au calcul booléen

Dans le cadre de la ressource **Mathématiques discrètes**, vous étudiez actuellement (ou allez étudier prochainement) la logique des propositions. Une approche algébrique de cette logique a été proposée au 19<sup>ème</sup> siècle par le mathématicien britannique George Boole. On parle d'algèbre de Boole, ou de calcul booléen pour désigner ces travaux. Le type booléen, que l'on retrouve dans les langages de programmation, doit également son nom à G. Boole. Aujourd'hui, l'algèbre de Boole est largement utilisée en informatique et dans la conception des circuits électroniques.

Dans le calcul booléen, les variables prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  et seuls trois opérateurs sont utilisés (en plus des parenthèses) :

- l'opérateur de disjonction (le « ou » logique, également noté  $\vee$  en mathématiques) est noté '+' ;
- l'opérateur de conjonction (le « et » logique, également noté  $\wedge$  en mathématiques) est noté '.' ;
- l'opérateur de négation (le « non » logique, également noté  $\neg$  en mathématiques) est noté en ajoutant une barre au dessus de l'expression sur laquelle il porte (on différenciera ainsi  $\bar{x}.\bar{y}$  et  $\overline{x.y}$ ).

Pour alléger les notations, on convient que l'opérateur "." peut être omis. Ainsi,  $a.b$  peut également se noter  $ab$ . De plus, il est convenu que '.' est prioritaire sur '+'. Ainsi,  $(a.b) + c$  peut également se noter  $a.b + c$  ou encore  $ab + c$ .

1. Donner les tables de vérité des trois opérateurs du calcul booléen.
2. Rappeler les tables de vérité et donner des expressions du calcul booléen pour les opérateurs « ou exclusif », « implique », et « équivalent ».
3. Donner une expression du calcul booléen équivalente à la formule  $(\neg p \wedge q) \rightarrow \neg(q \leftrightarrow \neg r)$ .

## 2 Un peu de calcul booléen

Soit  $E$ ,  $F$  et  $G$  des expressions du calcul booléen. Montrer les propriétés suivantes :

$$1. \overline{\overline{E}} = E$$

$$2. E + \overline{E} = 1$$

$$3. E\overline{E} = 0$$

$$4. \overline{E}\overline{F} = \overline{E} + \overline{F}$$

$$5. \overline{E + F} = \overline{E}\overline{F}$$

$$6. E(F + G) = EF + EG$$

$$7. E + FG = (E + F)(E + G)$$

À l'aide des propriétés ci-dessus, montrer que  $\bar{x} + y(x + \bar{z}) = \bar{x} + y$ .

## Circuits logiques combinatoires

Les circuits utilisés dans les ordinateurs pour réaliser des calculs sont construits à partir de portes logiques. Comme cela a été présenté en cours, avec la technologie CMOS, ces portes sont elles-mêmes conçues à partir de transistors PMOS et NMOS. On distingue traditionnellement deux types de circuits :

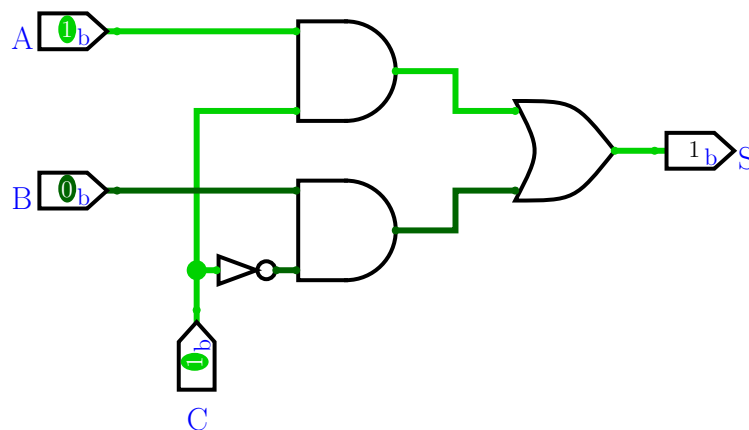
- Les circuits logiques combinatoires, dont, à chaque instant, les sorties ne dépendent que des entrées.
- Les circuits logiques séquentiels, dont, à chaque instant, les sorties dépendent des entrées et de l'état mémorisé. En plus des portes logiques, un tel circuit utilise des composants permettant de mémoriser de l'information (p.ex. bascules, verrous, registres, ...).

Dans les exercices qui suivent, on se concentre sur les circuits logiques combinatoires.

La relation entre les sorties et les entrées d'un circuit combinatoire peut s'exprimer de façon équivalente sous la forme d'un circuit, sous la forme d'une table de vérité, ou sous la forme d'un système d'équations booléennes.

## 3 Multiplexeur

Soit le circuit ci-dessous, déjà présenté en cours.



Ce circuit est communément appelé un multiplexeur. Il permet de faire une sélection parmi deux entrées.

1. Donner sa table de vérité et l'équation correspondante.

2. Le circuit présenté permet de sélectionner parmi deux entrées sur 1 bit. Donner un circuit permettant de sélectionner parmi deux entrées sur 1 octet (8 bits).
3. Donner un circuit permettant de sélectionner parmi 4 entrées :
  - en utilisant 3 multiplexeurs ;
  - en utilisant uniquement les portes logiques de base.
4. Donner un circuit démultiplexeur : ce circuit qui possède une entrée de donnée et une entrée de sélection est capable de sélectionner parmi 2 sorties. Donner également le système d'équations correspondant.

## 4 Universalité de la porte nand

Nous avons vu en cours que la porte nand est assez simple à réaliser en technologie CMOS à l'aide de deux transistors P mis en parallèles et deux transistors N mis en série. Elle est peu coûteuse en nombre de transistors et possède de façon générale de bonnes propriétés. En fait, on peut concevoir n'importe quelle circuit combinatoire en utilisant uniquement cette porte. On dit qu'elle est universelle.

1. Rappeler la table de vérité de la porte nand et son symbole.
2. Donner un circuit ne comportant que des portes nand et qui calcule la fonction booléenne non. Même questions pour les fonctions et, ou, xor, et nxor.
3. Soit l'expression  $s = (w.x) + (y.z)$ . Donner un circuit ne comportant que des portes nand qui calcule la même fonction. Si possible, minimiser le nombre de porte nand utilisées.